TD n°2: Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un † sont à faire en priorité, ceux marqués d'un † sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Quelques fonctions holomorphes

Exercice 1. Le logarithme complexe.
On définit la série entière

$$\log(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

1. Démontrer l'égalité de séries entières

$$\exp(\log(1+z)) = 1+z.$$

C'est une conséquence des règles de composition des développements limités. Pour une preuve plus self-contained, on peut dériver $\frac{\exp(\log(1+z))}{1+z}$. D'abord, on observe que la dérivée de $\log(1+z)$ est $\frac{1}{1+z}$, puis on calcule

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1+z}\exp(\log(1+z))\right) = \frac{1}{1+z}\cdot\frac{\exp(\log(1+z))}{(1+z)} - \frac{1}{(1+z)^2}\exp(\log(1+z)) = 0.$$

Par conséquent, $\exp(\log(1+z)) = C(1+z)$ pour une constante C. En considérant les termes constants, on trouve que $C = 1$.

2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $e^{w_0} = z_0$. Démontrer que la série entière

$$L_{w_0}(z) = w_0 + \log\left(1 + \frac{z-z_0}{z_0}\right)$$

définit une fonction analytique sur $\mathbb{D}(z_0, |z_0|)$ qui vérifie $e^{L_{w_0}(z)} = z$.
Comme $\log(1+z)$ converge sur $\mathbb{D}(0,1)$, la série entière $\log\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)$ converge pour $|z-z_0| \leqslant |z_0|$, donc sur $\mathbb{D}(z_0, |z_0|)$. Pour l'égalité $e^{L_{w_0}(z)} = z$, on part du fait que $\exp(\log(1+z)) = 1+z$ en tant que séries entières, donc $\exp(\log(1+z)) = 1+z$ pour tout $|z| < 1$. Par conséquent,

$$e^{L_{w_0}(z)} = e^{w_0}\cdot\left(1+\frac{z-z_0}{z}\right) = z_0 + z - z_0 = z.$$

3. On appelle détermination locale du logarithme sur un ouvert U une fonction $L : U \to \mathbb{C}$ vérifiant $e^{L(z)} = z$ pour tout z.

   (a) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ et $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux déterminations continues du logarithme. Démontrer que $f - g$ est constante à $2ik\pi$.
   On vérifie que $\exp(f(z) - g(z)) = \exp(f(z))/\exp(g(z)) = z/z = 1$. Ainsi, $f-g$ est à valeur dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Etant continue, elle est constante.

   (b) En déduire que toute détermination continue du logarithme est holomorphe.
   Soit L une détermination du logarithme sur U connexe. L'holomorphie est une propriété locale soit $a \in U$, et D un disque contenu dans U centré en a : on va prouver que L est holomorphe sur U. Comme $0 \notin U$, le rayon de D est inférieur à $|a|$ et par conséquent il existe une détermination holomorphe du logarithme au voisinage de a : on choisit b tel que $e^b = a$ et on considère L_b. En appliquant la question précédente à l'ouvert D, on trouve que L_b et L diffèrent d'une constante sur D, et donc L est holomorphe sur D, ce qui conclut.

---

† Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

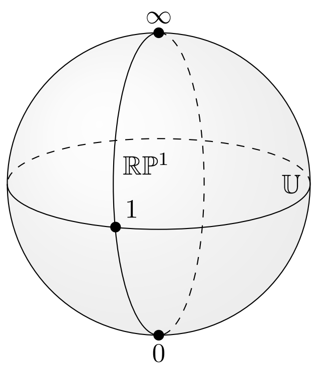
4. Soit L une détermination du logarithme sur un ouvert U. Démontrer que $\Re L(z) = \log|z|$ et que $\Im L(z)$ est une détermination de l'argument sur U.
On observe que $|e^w| = e^{\Re(w)}$. Par conséquent, $|z| = |e^{L(z)}| = e^{\Re L(z)}$, donc $\Re L(z) = \log|z|$. On en déduit également que $e^{i\Im L(z)} = \frac{z}{|z|}$, donc $\Im L(z)$ est un argument de z.

Exercice 2. La sphère de Riemann comme espace projectif et l'action de PGL_2.
On note $\mathbb{CP}^1$ l'ensemble des droites complexes dans $\mathbb{C}^2$. Si $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ est non nul, on note $[u : v]$ la droite qu'il engendre, et on a $[\lambda u : \lambda v] = [u : v]$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

1. Vérifier que $\mathbb{C}$ s'injecte dans $\mathbb{CP}^1$ en envoyant z sur $[z : 1]$.
Si $[z : 1] = [z' : 1]$ alors $z/1 = z'/1$.

2. Vérifier que $\mathbb{CP}^1 \setminus \mathbb{C}$ est réduit à un point, la droite $[1 : 0]$, que l'on note ∞.
Si $(u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, alors soit $v \neq 0$ auquel cas $[u : v] = [u/v : 1]$, soit $v = 0$, auquel cas $[u : v] = [u : 0] = [1 : 0]$.
Ainsi, $\mathbb{CP}^1$ s'identifie naturellement au compactifié d'Alexandroff du plan : la sphère. On le munit de cette topologie. Si $U \subseteq \mathbb{CP}^1$ est un ouvert contenant l'infini et $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction, on dit que f est holomorphe si elle est holomorphe au voisinage de tout point non-infini et si $z \mapsto f([1 : z])$ est holomorphe au voisinage de zéro (moralement, $z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe au voisinage de zéro). Si $f : U \to \mathbb{CP}^1$ est une fonction, on dit qu'elle est holomorphe si elle est de la forme $[u(z) : v(z)]$ avec u, v fonctions holomorphes.

3. Dessiner $\mathbb{RP}^1$, le disque unité et le demi-plan de Poincaré sur $\mathbb{CP}^1$.
Pour fixer les idées, disons que ∞ est le pôle nord et 0 est le pôle sud. Alors $\mathbb{RP}^1$ est un grand cercle qui passe par 0 et ∞, le disque unité est l'hémisphère sud de la sphère, et le demi-plan de Poincaré est un des deux hémisphères (celui qui contient i, au choix) délimités par le cercle $\mathbb{RP}^1$. Ci-dessous, $\mathbb{CP}^1$ est représenté avec la droite projective réelle, le cercle unité et les points $0, 1, \infty$.



4. Démontrer que pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, la fonction
$$[z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw]$$
est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{CP}^1$. On appelle homographie de $\mathbb{CP}^1$ toute application de cette forme.
Il faut vérifier que le point obtenu ne dépend pas des coordonnées choisies. Deux options : soit on remarque que l'application correspond à envoyer la droite $L = [z : w]$ sur gL, où g est la matrice correspondante, soit on remarque que la linéarité de l'application implique directement que $[\lambda z : \lambda w]$ est envoyé sur $[\lambda(az + bw) : \lambda(cz + dw)]$.
Pour l'holomorphie, c'est vrai par définition d'une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbb{CP}^1$.

5. Vérifier la cohérence avec la définition des homographies sur des ouverts de $\mathbb{C}$.
Si l'on pose $w = 1$, on trouve la formule
$$[z : 1] \mapsto [az + b : cz + d] = \left[\frac{az + b}{cz + d} : 1\right].$$

6. Expliciter une homographie qui envoie biholomorphiquement le disque unité $\mathbb{D}$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$.
Indication : on cherchera une homographie qui envoie 1 *sur* 0 *et* -1 *sur* ∞.
Le choix d'envoyer 1 sur 0 et -1 sur l'infini donne une homographie de la forme $\frac{a(z-1)}{b(z+1)}$. On vérifie que le choix $a=-i, b=1$ envoie effectivement $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{H}$ car elle envoie $z=x+iy$ sur $\frac{2y+i(1-|z|^2)}{1+|z|^2+2x}$, qui est de partie réelle positive si $|z|^2<1$, et son inverse, donné par par $z \mapsto \frac{i-z}{z+i}$ envoie $x+iy$ sur
$$\frac{-x+i(1-y)}{x+i(y+1)}$$
dont le module est <1 si $y>0$.

7. On note $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ l'ensemble des applications holomorphes de $\mathbb{CP}^1$ dans lui-même. Démontrer que l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ donnée par
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \big([z:w] \mapsto [az+bw : cz+dw]\big)$$
est compatible à la composition. En déduire que les homographies sont inversibles, et donner la formule pour l'inverse. On note $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ l'image de cette application.
L'homographie associée à une matrice g correspond à $L \mapsto g \cdot L$ pour L droite complexe dans $\mathbb{C}^2$. Ainsi, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est compatible à la composition, et l'inverse de l'homographie est donnée par l'inverse de la matrice associée.

8. Vérifier que la restriction de l'application précédente à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est toujours $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.
Pour $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, g et λg donnent la même homographie. En particulier, en prenant ζ une racine carrée du déterminant de g, on a $\zeta^{-1}g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ qui est envoyé sur le même élément que g.

9. Calculer les noyaux des morphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.
Supposons $\frac{az+b}{cz+d} = z$ pour tout z. L'équivalence en l'infini nous donne $a/d=1, c=0$. En évaluant en 0, on trouve $b/d=0$, donc $b=0$. On en conclut que la matrice correspondante est une homothétie.

Exercice 3. L'anneau des fonctions holomorphes sur un compact.
On considère, pour $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact connexe infini (non-réduit à un singleton), l'ensemble $\mathcal{O}(K)$ des fonctions $f : K \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe un voisinage V de K et une fonction analytique sur V dont la restriction à K est f.

1. Expliciter $\mathcal{O}\big(\overline{\mathbb{D}}(0,R)\big)$ pour $R>0$.
$\mathcal{O}\big(\overline{\mathbb{D}}(0,R)\big)$ est l'anneau des séries entières de rayon de convergence $>R$.

2. On va munir $\mathcal{O}(K)$ d'une structure d'anneau commutatif et vérifier quelques propriétés basiques.
   (a) Démontrer que $\mathcal{O}(K)$ est un sous-anneau de l'anneau des fonctions (continues) de K dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire qu'il est stable par somme, produit, et qu'il contient 0 et 1).
   0 et 1 sont clairement analytiques au voisinage de K. Si f, g sont deux fonctions définies sur K, disons sur U et V, alors elles sont aussi définies sur $U \cap V$, où leurs somme et produit existent.
   (b) Vérifier que $f \in \mathcal{O}(K)$ est inversible si et seulement si elle ne s'annule pas sur K.
   Soit $f \in \mathcal{O}(K)$ ne s'annulant pas sur K, définie sur un voisinage U de K. L'ensemble $V(f)$ des zéros de f est fermé dans U et disjoint de K. Par conséquent, $U \setminus V(f)$ est encore un voisinage ouvert de K, et $1/f$ y est bien définie. Réciproquement, si $fg=1$ sur K alors f ne s'annule clairement pas.
   (c) Démontrer que $\mathcal{O}(K)$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que si $fg=0$ dans $\mathcal{O}(K)$, alors $f=0$ ou $g=0$.
   Soient $f, g \in \mathcal{O}(K)$ définies sur un même voisinage U de K. Comme K est connexe, il est contenu dans une composante connexe de U, disons U_0. Si fg est nul sur un ouvert connexe, nécessairement f ou g est nul.

(d) Démontrer que f est mutliple de g dans $\mathcal{O}(K)$ si et seulement si f s'annule partout où g s'annule, et l'ordre d'annulation de f est supérieur à celui de g en ces points.
L'implication directe est claire, voyons la réciproque : Disons f, g définies sur un voisinage U, et supposons que f et g ne s'annulent que dans K. Il suffit de vérifier que la fonction f/g s'étend en une fonction analytique au voisinage de tout zéro de g. Pour cela, on développe f et g en série entière, on a $f(z) = (z-\alpha)^m f_0(z)$ et $g(z) = (z-\alpha)^l g_0(z)$ avec $m \geq l$. Ainsi, la fonction analytique $(z-\alpha)^{m-l} f_0(z)/g_0(z)$ est bien définie au voisinage de α, et coïncide avec f/g.

3. Soit $I \subseteq \mathcal{O}(K)$ un idéal non-nul. Démontrer que l'ensemble $V(I) := \{z \in K : \forall f \in I, f(z) = 0\}$ est fini.
C'est le théorème des zéros isolés : si $V(I)$ admet un point d'accumulation, alors $V(f)$ admet un point d'accumulation pour tout $f \in I$ et donc f est nulle. $V(I)$ est donc discret dans K, donc fini.
On note, pour $\alpha \in V(I)$, k_α le minimum des ordres d'annulation de fonctions de I en α.

4. Démontrer que I est contenu dans l'idéal engendré par le polynôme $\prod_{\alpha \in V(I)} (z-\alpha)^{k_\alpha}$.
Par définition, le polynôme choisi a des zéros inclus dans $V(f)$ pour tout $f \in I$, et les multiplicités des zéros du polynôme sont inférieures à celles de f, qui en est donc un multiple.

5. (a) Soit $g \in \mathcal{O}(K)$, $\alpha \in K$ un point de non-annulation de g et $k \geqslant 1$ un entier naturel. Démontrer qu'il existe un polynôme $s(z) \in \mathbb{C}[z]$ tel qu'au voisinage de α, on aie $s(z)f(z) = 1 + (z-\alpha)^k + \ldots$
Indication : On pourra considérer le développement en série entière de $\frac{1+(z-\alpha)^k}{g(z)}$ *au voisinage de* α.
On considère le développement à l'ordre $k+1$ de la fonction analytique $u(z) = \frac{1+(z-\alpha)^k}{g(z)}$. Comme $u(z)g(z) = 1 + (z-\alpha)^k + \ldots$ et que les termes de degré $\leqslant k$ de $u(z)g(z)$ ne font intervenir que des termes de degré $\leqslant k$ de u et g, on a le résultat demandé.

(b) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ distincts, g une fonction analytique sur K ne s'annulant pas aux α_i, $k_1, \ldots, k_m$ des entiers $\geqslant 1$. Démontrer qu'il existe un polynôme $S(z)$ tel que pour tout i, on aie au voisinage de α_i :

$$S(z)g(z) = 1 + (z-\alpha_i)^{k_i} + \ldots$$

On pose $s_i(z)$ un polynôme qui vérifie que $s_i(z)g(z)\prod_{j\neq i}(z-\alpha_j)^{k_j+1} = 1 + (z-\alpha_i)^{k_i} + \ldots$, et on vérifie que

$$S(z) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} (z-\alpha_j)^{k_j+1} s_i(z)$$

convient.

(c) Soient $f, g \in \mathcal{O}(K)$ deux fonctions sans point d'annulation en commun. Montrer qu'il existe des fonctions $R, S \in \mathcal{O}(K)$ telles que $R(z)f(z) + S(z)g(z) = 1$.
On considère le polynôme S obtenu ci-dessus pour α_i les zéros de f et k_i l'ordre d'annulation de f en α_i. Il reste alors seulement à vérifier que $R(z) := \frac{1-S(z)g(z)}{f(z)}$ est une fonction analytique sur K : ça découle du fait que $1 - S(z)g(z)$ est par construction un multiple de f.

6. Démontrer par récurrence que pour $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(K)$, il existe une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}(K)$ des f_i qui s'annule précisément sur $\bigcap_{i=1}^m V(f_i)$ et dont l'ordre d'annulation en $\alpha \in \bigcap_{i=1}^m V(f_i)$ est le minimum des ordres d'annulation des f_i en α.
Commençons par $m = 2$: en divisant f_1 et f_2 par le polynôme

$$P_1(z) = \prod_{\alpha \in V(f_1) \cap V(f_2)} (z-\alpha)^{\min\left(\mathrm{ord}_\alpha(f_1), \mathrm{ord}_\alpha(f_2)\right)}$$

on peut supposer qu'elles n'ont aucun zéro en commun. La question précédente donne R, S tels que $Rf_1/P_1 + Sf_2/P_1 = 1$, d'où $Rf_1 + Sf_2 = P_1$. Pour conclure la récurrence, il suffit de voir qu'avec le cas $m = 2$ on peut se ramener de $f_1, f_2, \ldots, f_m$ à $P_1, \ldots, f_m$ sans changer les minima d'ordres d'annulation.

7. Démontrer que $\mathcal{O}(K)$ est principal.
Soit I un idéal de $\mathcal{O}(K)$. On choisit pour chaque $\alpha \in K$ une fonction $f \in I$ qui s'annule à l'ordre minimal pour I en α. On rajoute des fonctions à cet ensemble jusqu'à avoir $f_1, \ldots, f_m$ telles que $\bigcap_i V(f_i) = V(I)$. C'est possible car $\bigcap_{f\in I} V(f) = V(I)$, donc on peut toujours, pour $\alpha \notin V(I)$, trouver une fonction dans I qui ne s'annule pas en α. Il existe donc, par la question précédente, un polynôme $P(z) \in \mathcal{O}(K)$ qui

s'annule exactement aux points de $V(I)$ avec les multiplicités minimales, et par conséquent tout élément de I est multiple de P, donc $I = (P)$.
Remarque : l'énoncé correspondant est faux pour $\mathcal{O}(U)$. En effet, étant donnée une suite $(a_n)_n$ sans point d'accumulation, on peut définir l'idéal de $\mathcal{O}(U)$ des fonctions nulles sur a_n apcr. Avec un théorème qui garantit l'existence de fonctions holomorphes de m premières dérivées prescrites sur un ensemble discret, on peut prouver par des méthodes similaires à celles de cet exercice que cet idéal n'est pas principal.

Equations de Cauchy-Riemann

1 Equations de Cauchy-Riemann

Exercice 4. Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$.
On note ∂ et $\overline{\partial}$ les opérateurs

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

1. Vérifier qu'une fonction différentiable (au sens réel) $f : U \to \mathbb{C}$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$.
   On écrit $f = u + iv$, et on calcule
   $$2\overline{\partial}(f) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}.$$
   En séparant parties réelle et imaginaire, on retrouve exactement les équations de Cauchy-Riemann.

2. Vérifier que ∂ et $\overline{\partial}$ vérifient la règle de Leibniz : pour f, g différentiables, on a $\partial(fg) = f\partial g + \partial f g$, et similairement pour $\overline{\partial}$.
   On peut voir qu'en toute généralité, si D, D' vérifient la règle de Leibniz alors $uD + vD'$ la vérifie aussi, puisque
   $$uD(fg) + vD'(fg) = uD(f)g + ufD(g) + vD'(f)g + vfD(g) = (uD + vD')(f)g + f(uD + vD')(g)$$
   en réarrangeant les termes.

3. Ecrire le laplacien Δ en fonction de ∂ et $\overline{\partial}$, et montrer que si f est holomorphe alors $|f|^2$ est sous-harmonique, c'est-à-dire que $\Delta|f|^2 \geqslant 0$.
   Pour le chemin le plus rapide, on peut être un peu malin.e et remarquer que $|f|^2 = f\overline{f}$, et $\overline{f}$ est antiholomorphe. Ainsi :
   $$\begin{aligned}\Delta f\overline{f} &= 4\partial\overline{\partial}(f\overline{f})\\ &= 4\partial(f\overline{\partial}(\overline{f}))\\ &= 4\partial(f)\overline{\partial}(\overline{f})\\ &= 4|\partial(f)|^2\end{aligned}$$
   qui est positive, et nulle ssi f est constante.

4. Démontrer que pour f holomorphe, on a $\Delta f = 0$, et donc les parties réelle et imaginaire de f sont harmoniques. Donner un contre-exemple à la réciproque, c'est-à-dire une fonction harmonique sur un ouvert de $\mathbb{C}$ qui n'est pas partie réelle d'une fonction holomorphe.
   Indication : on pourra prouver qu'il n'existe pas de fonction continue $\theta : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ telle que $e^{i\theta(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{U}$.
   $\Delta = 4\partial\overline{\partial}$ donc $\Delta f = 4\partial\overline{\partial} f = 0$. Comme Δ préserve les parties réelles et imaginaires, on conclut pour l'harmonicité de $\Re(f)$. Pour le contre-exemple, commençons par prouver l'indication. Pour ce faire, introduisons $\phi : \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ la fonction argument principal. C'est une fonction continue, qui vérifie $e^{i\phi(z)} = z$ pour tout z. Par conséquent, $e^{i(\theta(z)-\phi(z))} = 1$ pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$, et donc $\phi(z) = \theta(z)$ mod 2π pour tout z. Comme ϕ et θ sont continues et que $2\pi\mathbb{Z}$ est discret, $\phi - \theta$ est constante à $2k\pi$. Comme ϕ ne peut pas se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{U}$, $\theta = \phi + 2k\pi$ ne peut pas non plus.

Maintenant, considérons la fonction $z \mapsto \log|z|$ sur $\mathbb{C}^*$: elle est effectivement harmonique. Supposons qu'il existe $L : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorphe dont la partie réelle est $\log|z|$. Comme L est holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann nous assurent que L est, à constante imaginaire près, une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. Une telle détermination a pour partie imaginaire une détermination continue de l'argument sur $\mathbb{C}^*$, qui n'existe pas.

5. En déduire que si f ne s'annule pas, $\log|f|$ est harmonique. De même, si une détermination de $\arg(f)$ existe, démontrer qu'elle est harmonique.
On vérifie que si une détermination de $\log(f)$ existe sur un ouvert $V \subseteq U$, alors sa partie réelle est $\log|f|$ est sa partie imaginaire est $\arg(f)$. Pour l'existence d'une telle détermination localement au voisinage d'un point $a \in U$, il suffit de considérer un disque D suffisamment petit autour de a de sorte que $f(D)$ soit contenu dans le voisinage de $f(a)$ sur lequel un log complexe est défini. De là, $\log(f(z))$ est défini comme fonction holomorphe et on a que $\log|f|$ est harmonique en a, donc harmonique globalement.

Exercice 5. Somme et produit réels.
On fixe un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$.

1. Soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$ telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer que $f = g + c$ avec c une constante réelle.
On pose $h = f - g$. On a
$$2i\Im(h) = f - g - \overline{f} + \overline{g} = f + \overline{g} - \overline{f + \overline{g}}.$$
Comme $f + \overline{g}$ est à valeurs réelles, $\Im(h)$ est identifiquement nulle, ce qui garantit que $\Re(h)$ est constante par Cauchy-Riemann.

2. Soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$, avec g inversible. Supposons que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer que $f = cg$ avec c une constante réelle.
On pose $h = f/g = \frac{f\overline{g}}{|g|^2}$, donc h est à valeurs réelles et elle est donc constante.

Exercice 6. Cauchy-Riemann polaire. Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$. On écrit $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann se réécrivent
$$\begin{cases} \partial_\theta u = -r\partial_r v \\ r\partial_r u = \partial_\theta v \end{cases}.$$

On travaille en coordonnées $z, \overline{z}$ au lieu de x, y, et on écrit $z = re^{i\theta}$, $\overline{z} = re^{-i\theta}$.
On calcule alors que si $\overline{\partial} f = 0$, on a par la règle de la chaîne :
$$\partial_r f(re^{i\theta}) = (\partial f)(re^{i\theta})e^{i\theta} + (\overline{\partial} f)(re^{i\theta})e^{-i\theta} = (\partial f)(re^{i\theta})e^{i\theta}$$
et
$$\partial_\theta f(re^{i\theta}) = (\partial f)(re^{i\theta})ire^{i\theta} - (\overline{\partial} f)(re^{i\theta})ire^{-i\theta} = (\partial f)(re^{i\theta})ire^{i\theta}.$$
On en conclut que $\partial_\theta f = ir\partial_r f$, ce qui donne l'égalité voulue en isolant partie réelle et imaginaire.

Exercice 7. Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ par l'algèbre linéaire.
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$. On considère l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $J : W \to W$ donné par $f \mapsto (v \mapsto f(iv))$, et on voit W comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel par $(\lambda \cdot \varphi)(w) = \lambda\varphi(w)$.

1. Vérifier que J n'est pas la multiplication par i.
On peut considérer une forme $\mathbb{R}$-linéaire f (à valeurs dans $\mathbb{R}$) sur V : elle n'est clairement pas $\mathbb{C}$-linéaire et donc $f(Jv) \neq if(v)$.

2. Vérifier que J est diagonlisable sur W et expliciter les projections sur les espaces propres de valeurs propres i et $-i$, que l'on note $W^{1,0}$ et $W^{0,1}$.
$J^2 + 1 = 0$ donc J est diagonalisable. La projection sur $W^{1,0}$ est donnée par $v \mapsto v - iJv$ et celle sur $W^{0,1}$ par $v \mapsto v + iJv$.

3. Intepréter $W^{1,0}$ et $W^{0,1}$ en terme de $\mathbb{C}$-linéarité, et vérifier que $W^{0,1} = \overline{W^{1,0}}$ (conjugué complexe).
$W^{1,0}$ et le sous-espace vectoriel des formes $\mathbb{C}$-linéaires, et $W^{0,1}$ celui des formes $\mathbb{C}$-semilinéaires ($\varphi(zv) = \overline{z}\varphi(v)$).
Soient à présent U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable au sens réel. On fixe un point $p \in U$.

4. Appliquer la décomposition de l'exercice à l'application $\mathbb{R}$-linéaire $d_p f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et retrouver les expressions de $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en décomposant $d_p f$ dans les $\mathbb{C}$-bases dx, dy et $dz, d\bar{z}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
Les coordonnées de df dans la base dx, dy sont $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. La projection de cette base sur les sous-espaces propres donne $dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy$, et les coordonnées de df dans cette base sont bien ∂f et $\overline{\partial} f$. Pour le voir, il suffit d'écrire la matrice de la base $dz, d\bar{z}$ dans la base dx, dy, c'est la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$
Les coordonnées de df dans la base $dz, d\bar{z}$ sont obtenues en appliquant l'inverse de cette matrice, c'est-à-dire
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$
au vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Exercice 8. Fonctions holomorphes en plusieurs variables.
On définit, sur $\mathbb{C}^n$, les opérateurs
$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \overline{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$
On écrit $dz_j = dx_j + idy_j$, et $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$, et on fixe un ouvert U de $\mathbb{C}^n$.

1. Vérifier que pour $f : U \to \mathbb{C}$ différentiable, on a
$$df = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(f)dz_j + \overline{\partial}_j(f)d\bar{z}_j.$$
On décompose
$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j.$$
La définition de ∂_j, $\overline{\partial}_j$ et $dz_j, d\bar{z}_j$ nous assure alors que :
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j = \partial_j(f)dz_j + \overline{\partial}_j(f)d\bar{z}_j.$$
On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe si df est $\mathbb{C}$-linéaire.

2. Vérifier que cette condition est équivalente à $\overline{\partial}_j(f) = 0$ pour tout j.
$\sum_j \overline{\partial}_j(f)d\bar{z}_j$ est la partie $\mathbb{C}$-antilinéaire de df, donc df est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle est nulle, ce qui revient à $\overline{\partial}_j f = 0$ pour tout j.

3. Ecrire le laplacien en dimension $2n$ en fonction des $\partial_j, \overline{\partial}_j$. En déduire que les parties réelle et imaginaire des fonctions holomorphes en plusieurs variables sont harmoniques, et que $|f|^2$ est sous-harmonique.
$$\Delta = 4\sum_j \partial_j \overline{\partial}_j.$$
Il en découle que pour f holomorphe, Δf est nul (car $\overline{\partial}_j f$ est nul). On prouve, similairement à l'exercice 1, que
$$\Delta |f|^2 = \sum_j |\partial_j f|^2$$
en écrivant $|f|^2 = f\bar{f}$.

4. Prouver qu'en fait, la partie réelle d'une fonction holomorphe vérifie les équations $\partial_j \overline{\partial}_k u = 0$ pour tous j, k.
   Comme $\overline{\partial}_k f = 0$, on a nécessairement $\partial_j \overline{\partial}_k f = 0$. Comme $\partial_j \overline{\partial}_k = \overline{\partial}_k \partial_j$, on a $\overline{\partial}_k \partial_j \overline{f} = 0$. En sommant les égalités, on obtient $2\partial_j \overline{\partial}_k \Re(f) = 0$, et en soustrayant on obtient $2i\partial_j \overline{\partial}_k \Im(f) = 0$.

5. Trouver une fonction harmonique $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ qui n'est, même localement, pas la partie réelle d'une fonction holomorphe.
   La piste pour trouver une fonction harmonique qui ne satisfait pas à ces équations est claire : on peut chercher $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\partial_1 \overline{\partial}_1 u = -\partial_2 \overline{\partial}_2 u$ mais $\partial_1 \overline{\partial}_1 u \neq 0$ (ce qui serait nécessaire pour être localement la partie réelle d'une fonction holomorphe).
   On peut par exemple prendre $u(z_1, z_2) = \Re(z_1)^2 - \Re(z_2)^2$ qui vérifie
$$4\partial_1 \overline{\partial}_1 u = 1, 4\partial_2 \overline{\partial}_2 u = -1.$$